Laplace Transform ในฟิสิกส์ฉบับพื้นฐาน

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

3 ตุลาคม พ.ศ. 2563

1 บทนำ

Laplace Transform ($\mathscr{L}$) เป็นการแปลงโดเมนเวลา (t domain) เป็นโดเมนความถี่ (s domain) ซึ่งมีความซับซ้อนและมีความเชื่อมโยงกับ Fourier Transform แต่ผู้เขียนต้องการเน้นการใช้ Laplace Transform แก้ปัญหาฟิสิกส์จึงคัดเลือกเฉพาะส่วนที่สำคัญมานำเสนอในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งสามารถทำได้โดยแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แล้วจัดรูปสมการให้สามารถแปลงผกผันออกมาเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นได้

2 อธิบายบทนิยาม

สมมติสมการการเคลื่อนที่ ที่เราต้องการหา $v(t)$

$$m\dot{v} + \beta v = 0$$

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปจะแก้ด้วยการหาปริพันธ์

$$\int \dot{v}\,\mathrm{d}t + \beta \int v\,\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t$$

แต่การทำเช่นนี้จะทำให้เกิดปัญหา คือ จะเกิดพจน์ $\int v\,\mathrm{d}t$ ขึ้นซึ่งสังเกตได้ว่าเราจะไม่มีทางอินทิเกรตให้เหลือพจน์ $v(t)$ อย่างเดียวได้ จึงต้องใช้วิธีอินทิเกรตแบบสร้างสรรค์ คือ อินทิเกรตให้ทุกพจน์อยู่ในรูปของ $\int \square\,\mathrm{d}t$ แล้วค่อยแก้สมการต่อ ระลึกว่ามีการอินทิเกรตรูปแบบหนึ่งที่สามารถทำสิ่งที่เราต้องการได้ คือ Integration by parts แต่เราต้องการฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นตัวเดิมมาช่วยในการทำ Integration by parts เราจึงสมมติ e^{-st} ขึ้นมาช่วยในการอินทิเกรตโดยมีเครื่องหมายลบเนื่องจากสูตรของ Integration by parts นั้น มีลบอยู่แต่เรานิยมให้เป็นบวกมากกว่าจึงใส่ลบหน้า s ไปด้วย ดังนั้นจะได้

$$\int \dot{v}e^{-st}\,\mathrm{d}t = ve^{-st} + s\int ve^{-st}\,\mathrm{d}t$$

ต่อมาเราต้องการให้พจน์ ve^{-st} เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งเพราะจะทำให้เราคำนวณได้ง่ายขึ้นมาก เราจึงเปลี่ยนเป็นปริพันธ์จำกัดเขตโดยมีขอบเขตบนเป็น ∞ เพราะจะทำให้พจน์นั้นเป็น 0 และให้ขอบเขตล่างเป็น 0 เพราะจะทำให้พจน์นั้นเป็นค่าคงที่

$$\int_0^\infty \dot{v}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[ve^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty ve^{-st}\,\mathrm{d}t = -v(0) + s\int_0^\infty ve^{-st}\,\mathrm{d}t$$

โดย $v(0)$ คือ เงื่อนไขตั้งต้น (Initial condition) ที่โจทย์จะกำหนดมาหรือให้เราทำความเข้าใจสถานการณ์เอง (เช่น ปล่อยวัตถุให้ตกลงสู่พื้นจากหยุดนิ่งจะได้ $v(0) = 0$) จากนั้นนิยามฟังก์ชันใหม่ขึ้นมาเพื่อความสะดวกในการเขียนการอินทิเกรตแบบนี้ว่า Laplace Transform

$$\int_0^\infty \dot{v}e^{-st}\,\mathrm{d}t \equiv \mathscr{L}\{\dot{v}\} = -v(0) + s\int_0^\infty ve^{-st}\,\mathrm{d}t$$

และนิยามอีกฟังก์ชันตามความนิยม คือ

$$\int_0^\infty ve^{-st}\,\mathrm{d}t \equiv \mathscr{L}\{v\} \equiv V(s)$$

ที่นิยามแบบนี้เพราะในที่สุด $V(s)$ จะเป็นฟังก์ชันที่นำไปสู่ผลเฉลยของสมการโดยการทำ Inverse Laplace Transform ($\mathscr{L}^{-1}$) และเราอาจจะเขียน $V(s)$ ย่อ ๆ เป็น V ทำให้สุดท้ายแล้วจะได้

$$\mathscr{L}\{\dot{v}\} = -v(0) + sV$$

และเขียนนิยามทั่วไปของ Laplace Transform ได้เป็น

$$\boxed{\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t} \tag{1}$$

เราจะเห็นว่าการที่เราจะทำ Laplace Transform ได้นั้น เราต้องอินทิเกรตทุกพจน์ของสมการ จึงมีผู้ทำตาราง Laplace Transform ไว้เรียบร้อยแล้วให้เรานำมาใช้งานได้โดยสะดวก (พิจารณาเฉพาะ $t \geqslant 0$)

ลำดับที่	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
7	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

ตารางที่ 1: Laplace Transform บางส่วน (a เป็นค่าคงที่)

ลำดับที่	$g(t)$	$\mathscr{L}\{g(t)\}$
1	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$	$sF(s) - f(0)$
2	$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$
3	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

ตารางที่ 2: สมบัติของ Laplace Transform บางส่วน

จากตารางทำให้เราทราบว่าถ้าเราพบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมาก ๆ การใช้ Laplace Transform จะช่วยให้เราแก้ได้ง่ายขึ้นเป็นอย่างมาก

3 ตัวอย่างโจทย์ปัญหา

ปล่อยวัตถุมวล m จากหยุดนิ่งที่มีความสูง h วัดจากพื้นในสนามโน้มถ่วง g และมีแรงต้านอากาศ βv
จงหา (ด้วยวิธี Laplace Transform)

1. $v(t)$
2. $x(t)$

จาก

$$\sum F = ma \tag{2}$$

จะได้

$$mg - \beta v = ma \tag{3}$$

ทำ Laplace Transform

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{mg - \beta v = ma\} \\ \mathscr{L}\{mg - \beta v = m\dot{v}\} \\ mg\mathscr{L}\{1\} - \beta\mathscr{L}\{v\} = m\mathscr{L}\{\dot{v}\} \\ \frac{mg}{s} - \beta V = m(sV - v(0))\end{aligned}$$

เนื่องจากปล่อยวัตถุจากหยุดนิ่ง ดังนั้น $v(0) = 0$

$$\begin{aligned}V &= \frac{mg}{s(ms+\beta)} \\ V &= \frac{g}{s(s+\frac{\beta}{m})}\end{aligned}$$

แยกเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned} V &= \frac{mg}{\beta s} - \frac{mg}{\beta(s+\frac{\beta}{m})} \\ \mathscr{L}\{v(t)\} &= \frac{mg}{\beta s} - \frac{mg}{\beta(s+\frac{\beta}{m})} \end{aligned}$$

ทำ Inverse Laplace Transform

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{mg}{\beta s} - \frac{mg}{\beta(s+\frac{\beta}{m})}\right\} \\ v(t) &= \frac{mg}{\beta}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{\beta}{m})}\right\}\right) \end{aligned}$$

จากการเปิดตารางจะได้ผลเฉลยคือ

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \ \blacksquare$$

จาก (3) จะได้

$$mg - \beta\dot{x} = m\ddot{x}$$

ทำ Laplace Transform

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\{mg - \beta\dot{x} = m\ddot{x}\} \\ &mg\mathscr{L}\{1\} - \beta\mathscr{L}\{\dot{x}\} = m\mathscr{L}\{\ddot{x}\} \\ &\frac{mg}{s} - \beta(sX - x(0)) = m(s^2 - sx(0) - \dot{x}(0)) \end{aligned}$$

เนื่องจากปล่อยวัตถุจากความสูง h และหยุดนิ่ง ดังนั้น $x(0) = -h, \dot{x}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{mg}{s} - \beta sX - \beta h &= ms^2X + msh \\ X &= \frac{mg - s\beta h - mhs^2}{ms^3 + \beta s^2} \end{aligned}$$

แยกเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned} X &= \frac{mg}{s^2(ms+\beta)} - \frac{sh(ms+\beta)}{s^2(ms+\beta)} \\ X &= \frac{g}{s^2(s+\frac{\beta}{s})} - \frac{h}{s} \\ X &= \frac{mg}{\beta s^2} - \frac{m^2g}{\beta^2 s} + \frac{m^2g}{\beta^2(s+\frac{\beta}{m})} - \frac{h}{s} \\ \mathscr{L}\{x(t)\} &= \frac{mg}{\beta s^2} - \frac{m^2g}{\beta^2 s} + \frac{m^2g}{\beta^2(s+\frac{\beta}{m})} - \frac{h}{s} \end{aligned}$$

ทำ Inverse Laplace Transform

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{mg}{\beta s^2} - \frac{m^2 g}{\beta^2 s} + \frac{m^2 g}{\beta^2 (s+\frac{\beta}{m})} - \frac{h}{s}\right\} \\
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{mg}{\beta}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{\beta}\left(\frac{1}{s+\frac{\beta}{m}} - \frac{1}{s}\right)\right) - \frac{h}{s}\right\} \\
x(t) &= \frac{mg}{\beta}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{m}{\beta}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{\beta}{m}}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right)\right) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{h}{s}\right\}
\end{aligned}
$$

จากการเปิดตารางจะได้ผลเฉลยคือ

$$
x(t) = \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)\right) - h \blacksquare
$$